Matrizes 1

Fernando Soares Coutinho
Professor do Colegiado de Matemática do CEST-UEA

Disciplina: Álgebra Linear - CEST0344
Turma MV19 T01

5 de maio de 2021

Prof. Fernando Soares Coutinho

Roteiro da aula

Prof. Fernando Soares Coutinho

Definição de Matrizes

- Chama-se matriz de ordem m por n a um quadro de $m \times n$ elementos dispostos em m linhas e n colunas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Cada elemento da matriz A é indicado com dois índices a_{ij}. O primeiro índice indica a linha e o segundo indica a coluna em que o elemento está.

Prof. Fernando Soares Coutinho

Matriz Retangular

Matriz retangular é uma matriz na qual $m \neq n$.

Exemplo

$$A_{(3,4)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & 7 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } A_{(2,5)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz-Coluna

Matriz-coluna é uma matriz de ordem $m \times 1$.

Exemplo

$$A_{(3,1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ A_{(5,1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ e } A_{(m,1)} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}.$$

Prof. Fernando Soares Coutinho

Matriz-linha

Matriz-linha é uma matriz de ordem $1 \times n$.

Exemplo

$A_{(1,3)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_{(1,2)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$ e

$A_{(1,n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$.

Prof. Fernando Soares Coutinho

Matriz Quadrada

Matriz quadrada é uma matriz que possui o mesmo número de linhas e colunas.

Exemplo

$$A_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \ A_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$A_{(n,n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Matriz Quadrada - Diagonal principal

Em uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$, os elementos a_{ij} em que $i = j$ constituem a diagonal principal.

Exemplo

$$A_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 9 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } A_{(n,n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Prof. Fernando Soares Coutinho

Matriz Quadrada - Matriz Diagonal

Uma matriz diagonal é uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ tais que os elementos $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

Exemplo

$$A_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } A_{(n,n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Prof. Fernando Soares Coutinho

Matriz Quadrada - Matriz Identidade I ou unidade

É uma matriz diagonal $A = [a_{ij}]$ tais que os elementos $a_{ij} = 1$ para $i = j$.

Exemplo

$$I = A_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } I = A_{(n,n)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Prof. Fernando Soares Coutinho

Matriz zero ou nula

É uma matriz em que todos os seus elementos são nulos.

Exemplo

$$A_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; A_{(1,3)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } A_{(3,4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Igualdade de matrizes

Duas matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$, de mesma ordem (m, n), são iguais se, e somente se, $a_{ij} = b_{ij}$ para qualquer i, j.

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Adição de Matrizes

A soma de duas matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$, de mesma ordem (m, n), é uma matriz $C = [c_{ij}]$ tal que

$$a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}.$$

Exemplo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Diferença de Matrizes

A diferença $A - B$ de duas matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$, de mesma ordem (m, n), é uma matriz $C = [c_{ij}]$ tal que

$$a_{ij} - b_{ij} = c_{ij}.$$

Exemplo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \\ a_{31} - b_{31} & a_{32} - b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}.$$

Propriedades da Adição de Matrizes

Para quaisquer matrizes A, B e C de mesma ordem, temos:

- $A + (B + C) = (A + B) + C$ (Associatividade).
- $A + 0 = 0 + A = A$ (Elemento neutro aditivo).
- $-A + A = A - A = 0$ (Elemento inverso aditivo).
- $A + B = B + A$ (A adição é comutativa).

Prof. Fernando Soares Coutinho

Produto de uma matriz por um escalar

Se λ é um escalar, o produto de uma matriz $A = [a_{ij}]$ por esse escalar é uma matriz $B = [b_{ij}]$ tal que

$$b_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Exemplo

$$3 \times \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -6 & 9 \\ 6 & 3 & -12 \end{bmatrix}.$$

Prof. Fernando Soares Coutinho

Propriedades da Multiplicação de uma matriz por um escalar

Propriedades da Multiplicação de uma matriz por um escalar

Para quaisquer matrizes A e B de mesma ordem e quaisquer escalares α, β, temos:

- $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$ (Associatividade).
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ (Distributividade).
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ (Distributividade).
- $1A = A$.

Multiplicação de Matrizes

Sejam $A_{(m,n)} = [a_{ij}]$ e $B_{(n,p)} = [b_{rs}]$. Definimos $AB_{(m,p)} = [c_{uv}]$ onde

$$c_{uv} = \Sigma_{k=1}^{n} a_{uk} b_{kv} = a_{u1} b_{1v} + \cdots + a_{un} b_{nv}.$$

Observação

- Só podemos efetuar o produto de duas matrizes $A_{(m,n)}$ e $B_{(l,p)}$ se o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda, isto é, $n = l$. Além disso, a matriz resultado $C = AB$ será de ordem $m \times p$.

Prof. Fernando Soares Coutinho

Multiplicação de Matrizes

Sejam $A_{(m,n)} = [a_{ij}]$ e $B_{(n,p)} = [b_{rs}]$. Definimos $AB_{(m,p)} = [c_{uv}]$ onde

$$c_{uv} = \Sigma_{k=1}^{n} a_{uk} b_{kv} = a_{u1} b_{1v} + \cdots + a_{un} b_{nv}.$$

Observação

- O elemento c_{ij} é obtido multiplicando os elementos da i-ésima linha da primeira matriz pelos elementos correspondentes da j-ésima coluna da segunda matriz, e somando estes produtos.

Prof. Fernando Soares Coutinho

Multiplicação de Matrizes

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}_{3\times {\color{red}2}} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}_{{\color{red}3}\times 2} \quad \text{Não é possível} \; .$$

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}_{{\color{green}3}\times {\color{red}2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{{\color{red}2}\times {\color{green}2}} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot 0 & 2(-1) + 1\cdot 4 \\ 4\cdot 1 + 2\cdot 0 & 4(-1) + 2\cdot 4 \\ 5\cdot 1 + 3\cdot 0 & 5(-1) + 3\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}_{{\color{green}3}\times {\color{green}2}}$$

Prof. Fernando Soares Coutinho

Multiplicação de Matrizes não é comutativa

A mulltiplicação de duas matrizes A e B não é comutativa, pois em geral $AB \neq BA$ (podendo um dos membros estar definido e o outro não).
Existem matrizes A e B tais que $AB = BA$ mas isso não é a regra.

Exemplo

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$.

$$AB = \begin{bmatrix} 17 & 23 \\ 39 & 53 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 26 & 38 \\ 30 & 44 \end{bmatrix}$$

Portanto $AB \neq BA$.

Prof. Fernando Soares Coutinho

Multiplicação de Matrizes: casos especiais -Matriz identidade

Dada qualquer matriz A, temos que

$$AI = IA = A.$$

Exemplo

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ implicam que

$$AI = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } IA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Prof. Fernando Soares Coutinho

Multiplicação de Matrizes: casos especiais -Matriz inversa

Dadas duas matrizes quadradas A e B se $AB = BA = I$, dizemos que B é a matriz inversa de A e a representamos por A^{-1}. Isto é, $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Exemplo

Dadas as matrizes quadradas $A = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}$ temos que

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \text{ e } BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = I$$

Assim, B é a matriz inversa de A.

Propriedades da multiplicação de matrizes

Propriedades da multiplicação de matrizes

Admintindo que as ordens das matrizes possibilitem as operações:

- $(AB)C = A(BC)$, quaisquer $A_{(m,n)}, B_{(n,p)}$ e $C_{(p,r)}$ (Associatividade).
- $(A + B)C = AC + BC$, quaisquer $A_{(m,n)}, B_{(m,n)}$ e $C_{(n,p)}$ (Distributividade).
- $I_m A = AI_n = A$, quaisquer $A_{(m,n)}$ (Elemento neutro multiplicativo).
- $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$, quaisquer $\lambda \in \mathbb{R}$, $A_{(m,n)}$ e $B_{(n,p)}$ (Associatividade).
- Não é comutativa.
- $AB = 0$ não implica $A = 0$ ou $B = 0$.

Exercícios

- Fazer todos exercícios resolvidos do livro texto páginas 387-393, confira sua solução com a do livro, tire dúvidas e ajude os colegas.

- Fazer todos exercícios propostos do livro texto páginas 393-397, confira sua solução com a do livro, tire dúvidas e ajude os colegas.

Prof. Fernando Soares Coutinho

Bibliografia

- . STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Álgebra Linear*. 2ª edição, São Paulo, editora Pearson Makron Books, 2012.
- . BOLDRINI, Jose Luiz ; FIGUEIREDO, Vera L. *Álgebra Linear*. 3ª edição, São Paulo, editora HARBRA, 1980.
- . STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Introdução á Álgebra Linear*. São Paulo, editora Pearson Makron Books, 1997.

Prof. Fernando Soares Coutinho

Orientação de estudo

- Destine o horário da disciplina para seu estudo individual (leitura do livro texto, resolução de exercícios e partilha de dúvidas com colegas e professor). Aula: Terça e Quinta: de 15h às 17h30min. Momento de atendimento extra do professor: Quinta, de 18h às 19h40min.

- Não deixe acumular.

Prof. Fernando Soares Coutinho

Orientação de estudo

- Evite copiar resolução de exercícios. Tente fazer sozinho e só depois tire dúvidas com os colegas e professor.

- Quando tiver dúvidas que quiser partilhar comigo mande via whatsapp qualquer dia/horário. Se for possível responderei antes, mas procurarei atender nos horários da disciplina/atendimento.

Prof. Fernando Soares Coutinho

Orientação de estudo

- Tenha em mente da sua grande responsabilidade em sua aprendizagem. Se você só copiar, terá grande chances de ser aprovado com êxito, porém vai ter sérios problemas no presente/futuro.

- É importante querer aprender, ler o material indicado, buscar resolver exercícios, ajudar os colegas, tirar dúvidas com o professor. Aprofundar com leituras extras.

Matrizes 1

Fernando Soares Coutinho
Professor do Colegiado de Matemática do CEST-UEA

Disciplina: Álgebra Linear - CEST0344
Turma MV19 T01

5 de maio de 2021

UEA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS

CEST Centro de Estudos Superiores de Tefé

Prof. Fernando Soares Coutinho