VII) Dadas duas matrizes A e B, se o produto delas for a matriz zero [0], não é necessário que A ou B sejam matrizes zero.

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entretanto, se $AB = 0$ qualquer que seja B, então $A = 0$. Do mesmo modo, se $AB = 0$ qualquer que seja A, então $B = 0$.

A.8 PROBLEMAS RESOLVIDOS

1) Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} y+4 & 2 \\ 9 & x^2+4 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 9 & 53 \end{bmatrix}$$

calcular y e x de modo que A seja igual a B, isto é:

$$\begin{bmatrix} y+4 & 2 \\ 9 & x^2+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 9 & 53 \end{bmatrix}$$

Pela definição de igualdade de matrizes, deve-se ter:

$y + 4 = 12 \quad \therefore \quad y = 8$

$x^2 + 4 = 53$

$x^2 = 53 - 4$

$x^2 = 49$

$x = \pm\sqrt{49}$

$x = \pm 7$

Para que as matrizes A e B sejam iguais, é necessário que $y = 8$ e $x = \pm 7$.

Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ -5 & 9 & -6 \\ 7 & 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 7 & 1 \\ -4 & 2 & 5 \\ 0 & 9 & 4 \end{bmatrix} \quad e \quad C = \begin{bmatrix} 7 & -8 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 9 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

2) Calcular A + B.

Solução

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ -5 & 9 & -6 \\ 7 & 4 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 7 & 1 \\ -4 & 2 & 5 \\ 0 & 9 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 10 & 9 \\ -9 & 11 & -1 \\ 7 & 13 & 3 \end{bmatrix}$$

3) Calcular C - A.

Solução

$$C - A = \begin{bmatrix} 7 & -8 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 9 & -5 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ -5 & 9 & -6 \\ 7 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -11 & -5 \\ 9 & -12 & 8 \\ 2 & -9 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Calcular 3A - 2B + 4C.

Solução

Fazendo D = 3A - 2B + 4C, vem:

$$D = 3 \times \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ -5 & 9 & -6 \\ 7 & 4 & -1 \end{bmatrix} - 2 \times \begin{bmatrix} -3 & 7 & 1 \\ -4 & 2 & 5 \\ 0 & 9 & 4 \end{bmatrix} + 4 \times \begin{bmatrix} 7 & -8 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 9 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -15 & 27 \\ 21 & 12 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 12 & -5 \\ -7 & 23 \\ 21 & -6 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 40 & -37 \\ 9 & 11 \\ 57 & -26 \end{bmatrix}$$

5) Calcular o produt

$$A_{(2,4)} = \begin{bmatrix} -8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solução

$A_{(2,4)} \times B_{(4,2)}$

Para efetuar a mu

-8 · · · 4 · · · · ·
2 · · · · -5 · · · · ·

$$D = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 24 \\ -15 & 27 & -18 \\ 21 & 12 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -14 & -2 \\ 8 & -4 & -10 \\ 0 & -18 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 28 & -32 & 12 \\ 16 & -12 & 8 \\ 36 & -20 & 4 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 12 & -5 & 22 \\ -7 & 23 & -28 \\ 21 & -6 & -11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 28 & -32 & 12 \\ 16 & -12 & 8 \\ 36 & -20 & 4 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 40 & -37 & 34 \\ 9 & 11 & -20 \\ 57 & -26 & -7 \end{bmatrix}$$

5) Calcular o produto das matrizes:

$$A_{(2,4)} = \begin{bmatrix} -8 & 4 & -6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B_{(4,2)} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -2 \\ 1 & -5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

Solução

$$A_{(2,4)} \times B_{(4,2)} = C_{(2,2)}$$

Para efetuar a multiplicação, vamos utilizar o dispositivo prático:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -2 \\ 1 & -5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -8 & 4 & -6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \end{array}$$

Portanto:

$$A \times B = C = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Observação

Daqui por diante, a multiplicação de duas matrizes $A_{(m, n)}$ e $B_{(n, p)}$ será feita sem a utilização do dispositivo prático: cada elemento c_{ij} da matriz $C_{(m, p)}$ será calculado de acordo com o disposto no item A.7.

6) Calcular o produto das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & -4 \\ 4 & 7 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Solução

$$A_{(3, 3)} \times X_{(3, 1)} = C_{(3, 1)}$$

$$C = A \times X = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & -4 \\ 4 & 7 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + 3y + 4z \\ 3x + 5y - 4z \\ 4x + 7y - 2z \end{bmatrix}$$

É interessante assinalar que a matriz C tem 3 linhas e uma só coluna:

- o elemento da 1ª linha é: $2x + 3y + 4z$;
- o elemento da 2ª linha é: $3x + 5y - 4z$;
- o elemento da 3ª linha é: $4x + 7y - 2z$.

Observação

O fato de que a matriz C do problema anterior tem 3 linhas e uma só coluna permite escrever, sob a forma matricial, o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = -4 \\ 3x + 5y - 4z = 25 \\ 4x + 7y - 2z = 24 \end{cases}$$

Fazendo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & -4 \\ 4 & 7 & -2 \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -4 \\ 25 \\ 24 \end{bmatrix}$$

pode-se escrever:

$$AX = B \text{ ou } \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & -4 \\ 4 & 7 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 25 \\ 24 \end{bmatrix}$$

De fato, efetuando o produto das matrizes do 1º membro, vem:

$$\begin{bmatrix} 2x + 3y + 4z \\ 3x + 5y - 4z \\ 4x + 7y - 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 25 \\ 24 \end{bmatrix}$$

e, de acordo com a definição de igualdade de matrizes:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = -4 \\ 3x + 5y - 4z = 25 \\ 4x + 7y - 2z = 24 \end{cases}$$

7) Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

verificar se B é inversa de A.

Solução

Para que a matriz B seja inversa da matriz A, é necessário que AB = I. Calculemos o produto AB:

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Tendo em vista que AB = I, a matriz B, que se representa por A^{-1}, é inversa de A.

Observação

O produto BA também é igual a I, o que significa que $A = B^{-1}$ é inversa de B. Deixamos a cargo do estudante calcular o produto BA, a título de exercício.

8) Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 4 & n \\ m & 9 \end{bmatrix}$$

calcular m e n para que B seja inversa de A.

Solução

Efetuando o produto AB, vem:

$$AB = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & n \\ m & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 + 5m & 9n + 45 \\ 28 + 4m & 7n + 36 \end{bmatrix}$$

Mas AB deve ser igual a I, isto é:

$$\begin{bmatrix} 36 + 5m & 9n + 45 \\ 28 + 4m & 7n + 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pela definição de igualdade de matrizes, deve-se ter:

$36 + 5m = 1 \therefore m = -7$

$28 + 4m = 0 \therefore m = -7$

$9n + 45 = 0 \therefore n = -5$

$7n + 36 = 1 \therefore n = -5$

Para que B seja inversa de A, deve-se ter $m = -7$ e $n = -5$.

De fato:

$$AB = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

A.8.1 Problemas Propostos

Nos problemas de 1 a 3, calcular os valores de m e n para que as matrizes A e B sejam iguais.

1) $$A = \begin{bmatrix} 8 & 15n \\ 12 + m & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 8 & 75 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$