

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -4 & 4 & -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -4 & 4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz A é nilpotente de índice 2.

Se $A^2 = 0$, então $A^3 = A^4 = A^5 = \dots = A^n = 0$.

b) Se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz A é nilpotente de índice 3.

Se $A^3 = 0$, então $A^4 = A^5 = A^6 = \dots = A^n = 0$.

A.16 PROBLEMAS RESOLVIDOS

1) Determinar a matriz A^T transposta da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 & 8 \\ 3 & 27 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

Solução

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 27 \\ -5 & 1 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Dadas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -7 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2) Calcular $(AB)^T$

Solução

a) Cálculo de

$$E = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -7 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

b) Determinação

$$(AB)^T = E^T =$$

Solução

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -7 \\ -5 & 1 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Dadas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -7 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 6 & -3 \\ -3 & 5 & 8 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2) Calcular $(AB)^T$.*Solução*a) Cálculo de $A_{(3,2)} \times B_{(2,3)} = E_{(3,3)}$.

$$E = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -7 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -4 & 6 & -3 \\ -3 & 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -52 \\ 9 & -17 & -65 \\ -4 & 8 & 38 \end{bmatrix}$$

b) Determinação de $(AB)^T = E^T$:

$$(AB)^T = E^T = \begin{bmatrix} -1 & 9 & -4 \\ -1 & -17 & 8 \\ -52 & -65 & 38 \end{bmatrix}$$

3) Calcular $B^T C$.*Solução*a) Determinação de B^T :

$$B^T = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 6 & 5 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$$

b) Cálculo de $B_{(3,2)}^T \times C_{(2,2)} = F_{(3,2)}$:

$$B^T C = F = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 6 & 5 \\ -3 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 & 6 \\ 29 & -8 \\ -4 & 25 \end{bmatrix}$$

4) Calcular $(AB)^T D$.*Solução*a) Cálculo de $(AB)^T$:(No caso presente, $(AB)^T = E^T$ já foi calculado no problema 2.)

$$(AB)^T = E^T = \begin{bmatrix} -1 & 9 & -4 \\ -1 & -17 & 8 \\ -52 & -65 & 38 \end{bmatrix}$$

b) Cálculo de $(AB)^T D = E_{(3,3)}^T \times D_{(3,3)} = G_{(3,3)}$:

$$(AB)^T D = G = \begin{bmatrix} -1 & 9 & -4 \\ -1 & -17 & 8 \\ -52 & -65 & 38 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 18 \\ 7 & 13 & -34 \\ -14 & 298 & -130 \end{bmatrix}$$

5) Dada a m

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

classificar

Solução

a) Determini

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

b) Cálculo d

$$S = A + A^T$$

c) Determini

$$S^T = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Tendo em vist

5) Dada a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 4 & 7 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

classificar a matriz $A + A^T = S$.

Solução

a) Determinação da matriz A^T .

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 6 \\ 9 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

b) Cálculo da matriz $A + A^T = S$.

$$S = A + A^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 4 & 7 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 6 \\ 9 & 1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 12 \\ 9 & 14 & 7 \\ 12 & 7 & 16 \end{bmatrix}$$

c) Determinação de S^T .

$$S^T = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 12 \\ 9 & 14 & 7 \\ 12 & 7 & 16 \end{bmatrix}$$

Tendo em vista que $A + A^T = S = S^T$, $A + A^T$ é uma matriz simétrica.

6) Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 4 \\ -3 & 8 & -5 \\ 2 & -6 & 7 \end{bmatrix}$$

classificar a matriz $A - A^T = P$.*Solução*a) Determinação de A^T .

$$A^T = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 1 & 8 & -6 \\ 4 & -5 & 7 \end{bmatrix}$$

b) Cálculo de $A - A^T = P$.

$$P = A - A^T = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 4 \\ -3 & 8 & -5 \\ 2 & -6 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 1 & 8 & -6 \\ 4 & -5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Determinação de P^T :

$$P^T = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tendo em vista que $A - A^T = P = -P^T$, $A - A^T$ é uma matriz anti-simétrica.

7) Dada a ma

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

classificar

Solução

a) Determi

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

b) Cálculo

$$S = AA^T =$$

c) Determi

$$S^T = \begin{bmatrix} 13 \\ -11 \end{bmatrix}$$

Tendo em

8) Dada a ma

$$M = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

calcular M

- 7) Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$$

classificar a matriz $AA^T = S$.

Solução

- a) Determinação de A^T :

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$$

- b) Cálculo de $AA^T = S$:

$$S = AA^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -11 \\ -11 & 24 \end{bmatrix}$$

- c) Determinação de S^T

$$S^T = \begin{bmatrix} 13 & -11 \\ -11 & 24 \end{bmatrix}$$

Tendo em vista que $A \cdot A^T = S = S^T$, AA^T é uma matriz simétrica.

- 8) Dada a matriz:

$$M = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

calcular MM^T e classificar a matriz M .

Solução

a) Determinação de M^T :

$$M^T = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Cálculo de $MM^T = Q$:

$$Q = MM^T = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = MM^T = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + 0 & \cos \theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta + 0 & 0 \\ \sin \theta \cos \theta - \cos \theta \sin \theta + 0 & \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se $Q = MM^T = I$, $M^T = M^{-1}$ e, por conseguinte, a matriz M é ortogonal.

9) Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -25 \\ -4 & -10 \end{bmatrix}$$

calcular A^2 e classificar a matriz A .

Solução

$$A^2 = \begin{bmatrix} 10 & \\ & 4 \end{bmatrix}$$

Tendo em vista

10) Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$$

calcular A^2 e

Solução

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & \\ -2 & \\ -4 & \end{bmatrix}$$

Tendo em vista

Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução

$$A^2 = \begin{bmatrix} 10 & -25 \\ 4 & -10 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 10 & -25 \\ 4 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tendo em vista que A^2 é igual à matriz zero, A é nilpotente de índice 2.

10) Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

calcular A^2 e classificar a matriz A .

Solução

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Tendo em vista que $A^2 = A$, a matriz A é idempotente (período igual a 1).

Dadas as matrizes triangulares superiores (A e B) e inferiores (C e D).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- 11) Calcular
- AB
- e classificar a matriz
- $AB = E$
- .

Solução

$$E = AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

A matriz $AB = E$ é uma matriz triangular superior.

- 12) Calcular
- CD
- e classificar
- $CD = F$
- .

Solução

$$F = CD = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \\ -10 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

A matriz $CD = F$ é uma matriz triangular inferior.**A.16.1 Problemas Propostos**

- 1) Determinar a matriz
- A^T
- transposta da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & -5 \\ 1 & -7 & 0 & -2 \\ 8 & -9 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

Dadas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 6 \\ -8 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & -5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 4 \\ 7 & 8 & 5 & 9 \\ 0 & 6 & 3 & -8 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -8 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

e $D =$

- 2) Calcular

- 3) Calcular

- 4) Calcular

- 5) Calcular

- 6)
- $2(A^T B^T) +$

Dadas as m

$$A = \begin{bmatrix} 2 & - \\ 3 & \\ 5 & - \end{bmatrix}$$

- 7) Classificar

- 8) Classificar

- 9) Classificar

- 10) Classificar

- 11) Classificar

- 12) Classificar