CAPÍTULO

1

VETORES

1.1 Reta Orientada – Eixo

Uma reta r é orientada quando se fixa nela um sentido de percurso, considerado *positivo* e indicado por uma seta (Fig. 1.1).

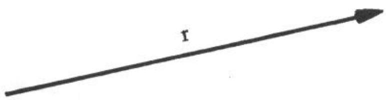


Figura 1.1

O sentido oposto é *negativo*. Uma reta orientada é denominada *eixo*.

1.2 Segmento Orientado

Um segmento orientado é determinado por um par ordenado de pontos, o primeiro chamado *origem* do segmento, o segundo chamado *extremidade*.

O segmento orientado de origem A e extremidade B será representado por AB e, geometricamente, indicado por uma seta que caracteriza visualmente o sentido do segmento (Fig. 1.2-a).

Figura 1.2-a

1.2.1 Segmento Nulo

Um segmento nulo é aquele cuja extremidade coincide com a origem.

1.2.2 Segmentos Opostos

Se AB é um segmento orientado, o segmento orientado BA é *oposto* de AB.

1.2.3 Medida de um Segmento

Fixada uma unidade de comprimento, a cada segmento orientado pode-se associar um número real, não negativo, que é a medida do segmento em relação àquela unidade. A medida do segmento orientado é o seu *comprimento* ou seu *módulo*. O comprimento do segmento AB é indicado por $\overline{AB}$.

Assim, o comprimento do segmento AB representado na Figura 1.2-b é de 5 unidades de comprimento:

$\overline{AB} = 5$ u.c.

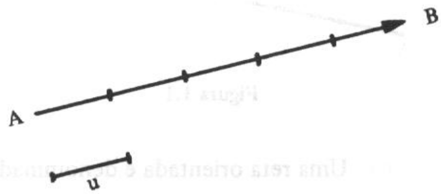


Figura 1.2-b

Observações

a) Os segmentos nulos têm comprimento igual a zero.
b) $\overline{AB} = \overline{BA}$.

1.2.4 Direção e Sentido

Dois segmentos orientados não nulos AB e CD têm a mesma direção se as retas suportes desses segmentos são paralelas (Figs. 1.2-c e 1.2-d):

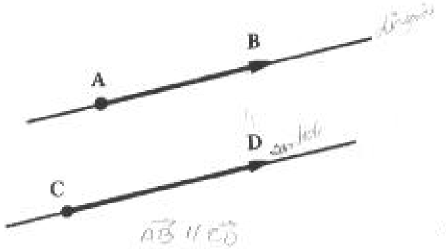


Figura 1.2-c

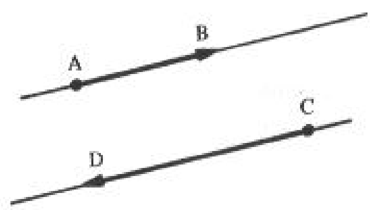


Figura 1.2-d

ou coincidentes (Figs. 1.2-e e1.2-f):
(colineares).

Figura 1.2-e

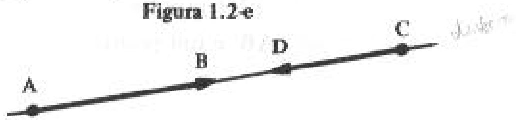


Figura 1.2-f

Observações

a) Só se pode comparar os sentidos de dois segmentos orientados se eles têm mesma direção.
b) Dois segmentos orientados opostos têm sentidos contrários.

1.3 Segmentos Equipolentes

Dois segmentos orientados AB e CD são *equipolentes* quando têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento (Figs. 1.3-a e 1.3-b).

Se os segmentos AB e CD não pertencem à mesma reta, Fig. 1.3-b, para que AB seja equipolente a CD é necessário que AB//CD e AC/BD, isto é, ABCD deve ser um paralelogramo.

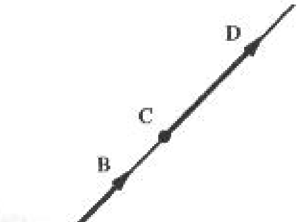


Figura 1.3-a

Figura 1.3-b

Observações

a) Dois segmentos nulos são sempre equipolentes.

b) A equipolência dos segmentos AB e CD é representada por

$$AB \sim CD$$

1.3.1 Propriedades da Equipolência

I) $AB \sim AB$ (reflexiva).

II) Se $AB \sim CD$, $CD \sim AB$ (simétrica).

III) Se $AB \sim CD$ e $CD \sim EF$, $AB \sim EF$ (transitiva).

IV) Dado um segmento orientado AB e um ponto C, existe um único ponto D tal que $AB \sim CD$.

1.4 Vetor

Vetor determinado por um segmento orientado AB é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a AB (Fig. 1.4-a).

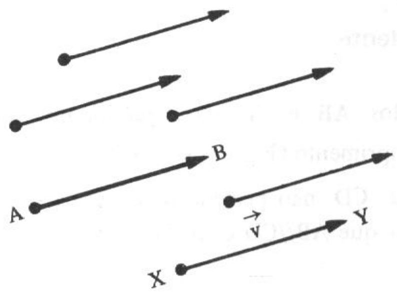


Figura 1.4-a

Se indicarmos com $\vec{v}$ este conjunto, simbolicamente poderemos escrever:

$$\vec{v} = \{XY / XY \sim AB\}$$

onde XY é um segmento qualquer do conjunto.

O vetor determinado por AB é indicado por $\overrightarrow{AB}$ ou $B - A$ ou $\vec{v}$.

Um mesmo vetor $\overrightarrow{AB}$ é determinado por uma infinidade de segmentos orientados, chamados *representantes* desse vetor, e todos equipolentes entre si. Assim, um segmento determina um conjunto que é o vetor, e qualquer um destes representantes determina o mesmo vetor. Portanto, com origem em cada ponto do espaço, podemos visualizar um representante de um vetor. Usando um pouco mais nossa capacidade de abstração, se considerarmos todos os infinitos segmentos orientados de origem comum, estaremos caracterizando, através de representantes, a totalidade dos vetores do espaço. Ora, cada um destes segmentos é um representante de um só vetor. Conseqüentemente, todos os vetores se acham representados naquele conjunto que imaginamos.

As características de um vetor $\vec{v}$ são as mesmas de qualquer um de seus representantes, isto é: o *módulo*, a *direção* e o *sentido* do vetor são o módulo, a direção e o sentido de qualquer um de seus representantes.

O módulo de $\vec{v}$ se indica por $|\vec{v}|$.

1.4.1 Vetores Iguais

Dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são iguais se, e somente se, $AB \sim CD$.

1.4.2 Vetor Nulo

Os segmentos nulos, por serem equipolentes entre si, determinam um *único* vetor, chamado vetor nulo ou vetor zero, e que é indicado por $\vec{0}$.

1.4.3 Vetores Opostos

Dado um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, o vetor $\overrightarrow{BA}$ é o oposto de $\overrightarrow{AB}$ e se indica por $-\overrightarrow{AB}$ ou por $-\vec{v}$.

1.4.4 Vetor Unitário

modulo de $\vec{v}$

$|\vec{v}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 1$

Um vetor $\vec{v}$ é *unitário* se $|\vec{v}| = 1$.

1.4.5 Versor

Versor de um vetor não nulo $\vec{v}$ é o vetor unitário de mesma direção e mesmo sentido de $\vec{v}$.

Por exemplo, tomemos um vetor $\vec{v}$ de módulo 3 (Fig. 1.4-b).

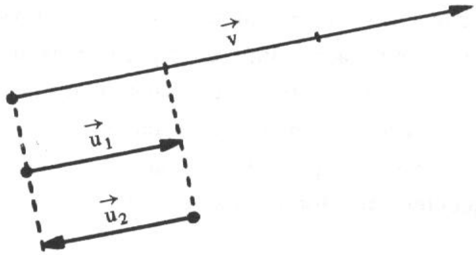


Figura 1.4-b

Os vetores $\vec{u_1}$ e $\vec{u_2}$ da figura são vetores unitários, pois ambos têm módulo 1. No entanto, apenas $\vec{u_1}$ tem a mesma direção e o mesmo sentido de $\vec{v}$. Portanto, este é o versor de $\vec{v}$.

1.4.6 Vetores Colineares

Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são *colineares* se tiverem a *mesma direção*. Em outras palavras: $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se tiverem representantes AB e CD pertencentes a uma mesma reta ou a retas paralelas (Fig. 1.4-c).

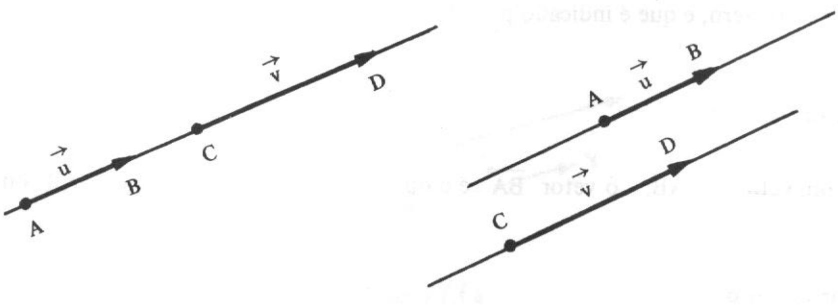


Figura 1.4-c

1.4.7 Vetores Coplanares

Se os vetores não nulos $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ (o número de vetores não importa) possuem representantes AB, CD e EF pertencentes a um mesmo plano π (Fig. 1.4-d), diz-se que eles são *coplanares*.

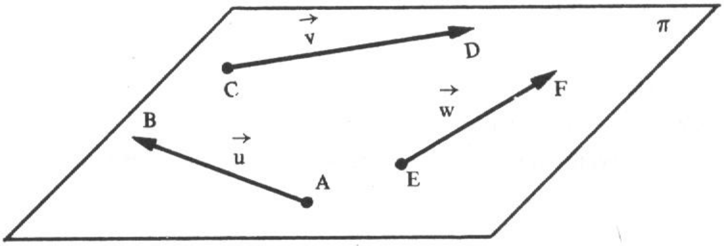
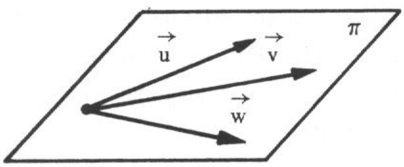


Figura 1.4-d

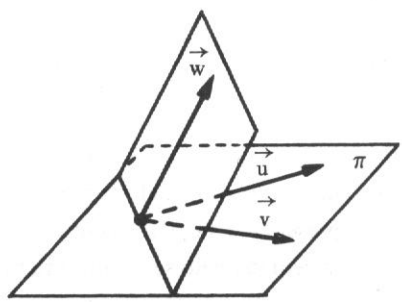
Guardemos bem o seguinte: *dois vetores* $\vec{u}$ e $\vec{v}$ *quaisquer são sempre coplanares*, pois podemos sempre tomar um ponto no espaço e, com origem nele, imaginar os dois representantes de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ pertencendo a um plano π que passa por este ponto.

Três vetores poderão ou não ser coplanares (Figs. 1.4-e e 1.4-f).



$\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares

Figura 1.4-e



$\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ não são coplanares

Figura 1.4-f

1.5 Operações com Vetores

1.5.1 Adição de Vetores

Sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ representados pelos segmentos orientados AB e BC (Fig. 1.5-a).

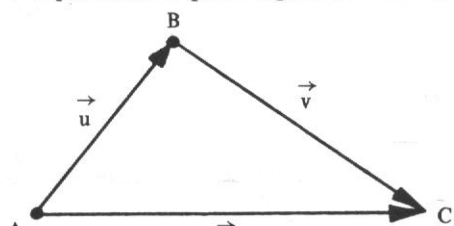


Figura 1.5-a

Os pontos A e C determinam um vetor $\vec{s}$ que é, por definição, a *soma* dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, isto é, $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$.

1.5.1.1 Propriedades da adição

I) Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

II) Associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

III) Existe um só vetor nulo $\vec{0}$ tal que para todo o vetor $\vec{v}$ se tem:

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$$

IV) Qualquer que seja o vetor $\vec{v}$, existe um só vetor $-\vec{v}$ (vetor oposto de $\vec{v}$) tal que

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = -\vec{v} + \vec{v} = \vec{0}.$$

1.5.2 Diferença de Vetores

Chama-se *diferença* de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e se representa por $\vec{d} = \vec{u} - \vec{v}$, ao vetor $\vec{u} + (-\vec{v})$.

Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, representados pelos segmentos orientados AB e AC, respectivamente, e construído o paralelogramo ABDC (Fig. 1.5-b e Fig. 1.5-c), verifica-se que a soma $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$ é representada pelo segmento orientado AD (uma das diagonais) e que a diferença $\vec{d} = \vec{u} - \vec{v}$ é representada pelo segmento orientado CB (a outra diagonal).

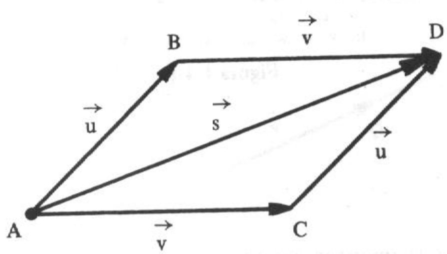


Figura 1.5-b

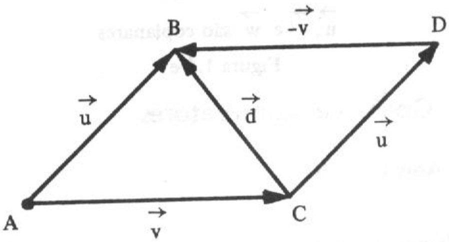


Figura 1.5-c

1.5.3 Multiplicação por um Número Real

Dado um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ e um número real $k \neq 0$, chama-se *produto do número real* k *pelo vetor* $\vec{v}$ o vetor $\vec{p} = k\vec{v}$, tal que:

a) módulo: $|\vec{p}| = |k\vec{v}| = |k|\,|\vec{v}|$;

b) direção: a mesma de $\vec{v}$;

c) sentido: o mesmo de $\vec{v}$ se $k > 0$, e contrário ao de $\vec{v}$ se $k < 0$ (Fig. 1.5-d).

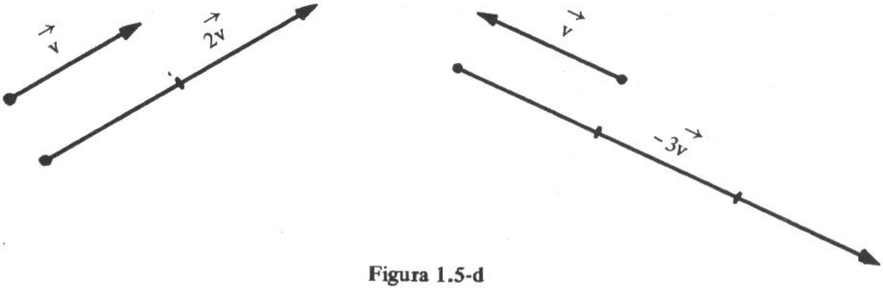


Figura 1.5-d

Observações

a) Se $k = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, o produto é o vetor $\vec{0}$.

b) Seja um vetor $k\vec{v}$, com $\vec{v} \neq \vec{0}$. Se fizermos com que o número real k percorra o conjunto $\mathbb{R}$ dos reais, obteremos todos os infinitos vetores colineares a $\vec{v}$, e, portanto, colineares entre si, isto é, qualquer um deles é sempre múltiplo escalar (real) do outro. Reciprocamente, dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, colineares, sempre existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = k\vec{v}$. A Figura 1.5-e mostra um exemplo desta última afirmação ($\vec{u} = -\frac{2}{5}\vec{v}$ ou $\vec{v} = -\frac{5}{2}\vec{u}$).

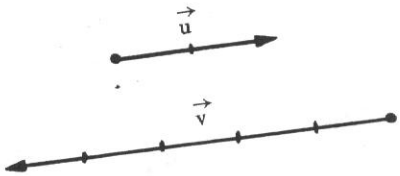


Figura 1.5-e

c) O versor de um vetor $\vec{v} \neq 0$ é o vetor unitário $\vec{u} = \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$ ou $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ (Fig. 1.5-f). De fato ele é unitário, pois:

$$|\vec{u}| = \left|\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right| = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{v}|} = 1$$

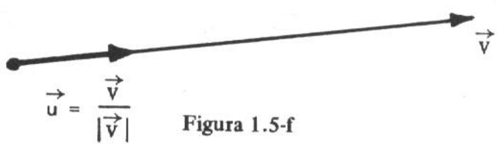


Figura 1.5-f

Daí, conclui-se que $\vec{v} = |\vec{v}|\vec{u}$, isto é, o vetor $\vec{v}$ é o produto de seu módulo pelo vetor unitário de mesma direção e mesmo sentido de $\vec{v}$.

1.5.3.1 Propriedades da multiplicação por um número real

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores quaisquer e a e b números reais, temos:

I) $a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v}$ (associativa)

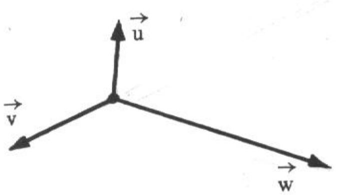
II) $(a+b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$ (distributiva em relação à adição de escalares)

III) $a(\vec{u}+\vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$ (distributiva em relação à adição de vetores)

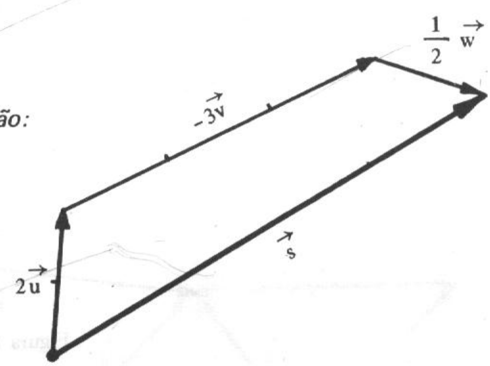
IV) $1\vec{v} = \vec{v}$ (identidade)

1.6 Problemas Resolvidos

1) Dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, de acordo com a figura, construir o vetor $2\vec{u} - 3\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w} = \vec{s}$.



Solução:



2) O paralelogramo ABCD é determinado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$, sendo M e N pontos médios dos lados DC e AB, respectivamente. Completar convenientemente:

a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} =$ . . . .

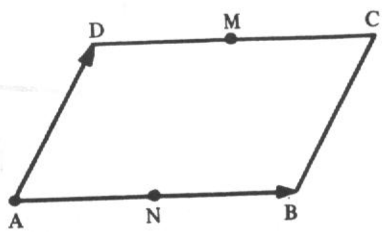
b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} =$ . . . .

c) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} =$ . . . .

d) $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BC} =$ . . . .

e) $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB} =$ . . . .

f) $\overrightarrow{BM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} =$ . . . .



Solução

a) $\overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$

c) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$

d) $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AM}$

e) $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{MN}$

f) $\overrightarrow{BM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BD}$

Observação

Sabe-se que dois vetores quaisquer $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, não colineares, são sempre coplanares. Como $a_1\vec{v}_1$ tem a direção de $\vec{v}_1$ e $a_2\vec{v}_2$ a direção de $\vec{v}_2$, o vetor $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$ será sempre um vetor representado no mesmo plano de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, sejam quais forem os reais a_1 e a_2 (Fig. 1.6-a)

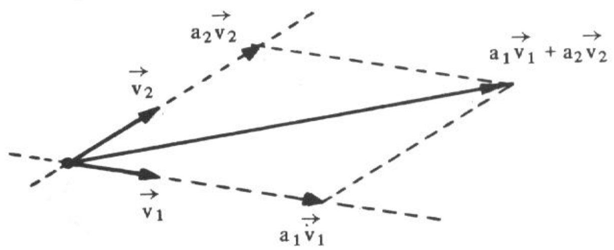


Figura 1.6-a

Reciprocamente, qualquer vetor representado no plano de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ será do tipo $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$, para a_1 e a_2 reais.

Vamos acrescentar a estes dois vetores um terceiro vetor $\vec{v}_3$. Então, pode ocorrer uma das situações:

a) o vetor $\vec{v}_3$ está representado no mesmo plano de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$

Neste caso, como o vetor $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$ está no plano de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ e sendo $a_3\vec{v}_3$ também deste plano, o vetor $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3$ estará representado no mesmo plano de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$;

b) o vetor $\vec{v}_3$ não está representado no mesmo plano de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

Neste caso, a soma do vetor $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$ (que está no plano de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$) com o vetor $a_3\vec{v}_3$, isto é, $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3$, será um vetor do espaço, conforme mostra a Figura 1.6-b.

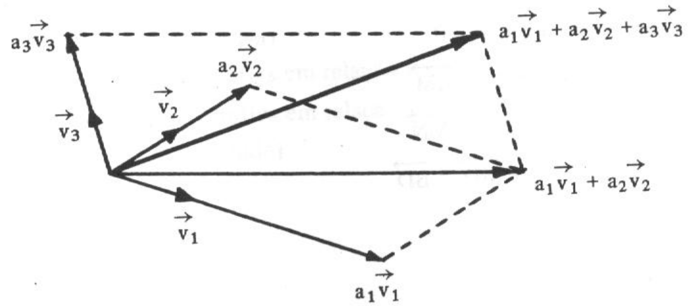


Figura 1.6-b

1.7 Ângulo de Dois Vetores

O *ângulo de dois vetores* $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos (Fig. 1.7-a) é o ângulo θ formado pelas semi-retas OA e OB (Fig. 1.7-b) e tal que $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

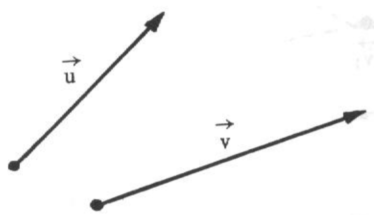


Figura 1.7-a

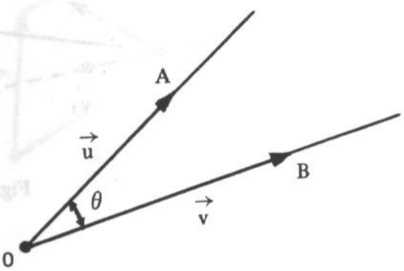
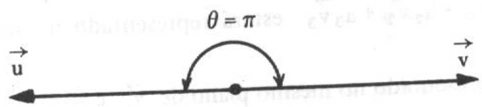


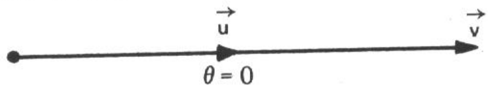
Figura 1.7-b

Observações

a) Se $\theta = \pi$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm a mesma direção e sentidos contrários.



b) Se $\theta = 0$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm mesma direção e mesmo sentido.



c) Se $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais (Fig. 1.7-c) e indica-se: $\vec{u} \perp \vec{v}$.

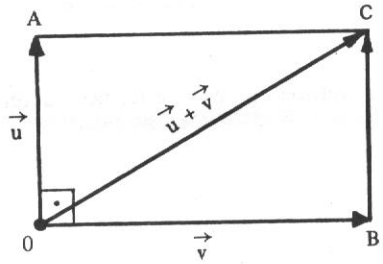


Figura 1.7-c

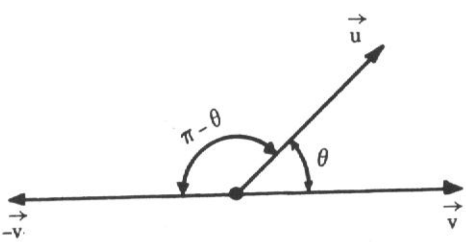
Neste caso, o $\triangle OBC$ permite escrever:

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$$

d) O vetor nulo é considerado ortogonal a qualquer vetor.

e) Se $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{v}$ e m é um número real qualquer, $\vec{u}$ é ortogonal a $m\vec{v}$.

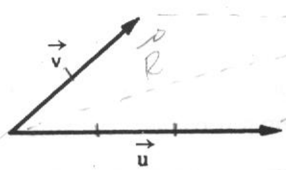
f) O ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $-\vec{v}$ é o suplemento do ângulo de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.



1.8 Problemas Propostos

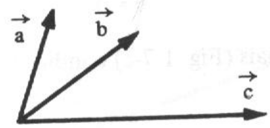
1) Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ da figura, mostrar, num gráfico, um representante do vetor:

a) $\vec{u} - \vec{v}$
b) $\vec{v} - \vec{u}$
c) $-\vec{v} - 2\vec{u}$
d) $2\vec{u} - 3\vec{v}$



2) Dados os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$, como na figura, apresentar um representante de cada um dos vetores:

a) $4\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c}$
b) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
c) $2\vec{b} - (\vec{a} + \vec{c})$



3) Sabendo que o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é de 60°, determinar o ângulo formado pelos vetores:

a) $\vec{u}$ e $-\vec{v}$
b) $-\vec{u}$ e $\vec{v}$
c) $-\vec{u}$ e $-\vec{v}$
d) $2\vec{u}$ e $3\vec{v}$

1.8.1 Resposta dos Problemas Propostos

3) *a*) 120°
b) 120°
c) 60°
d) 60°