CAPÍTULO

2

VETORES NO $\mathbb{R}^2$ E NO $\mathbb{R}^3$

No Capítulo 1, estudamos os vetores do ponto de vista geométrico e, no caso, eles eram representados por um segmento de reta orientado. No presente capítulo, vamos mostrar uma outra forma de representá-los: os segmentos orientados estarão relacionados com os sistemas de eixos cartesianos do plano e do espaço.

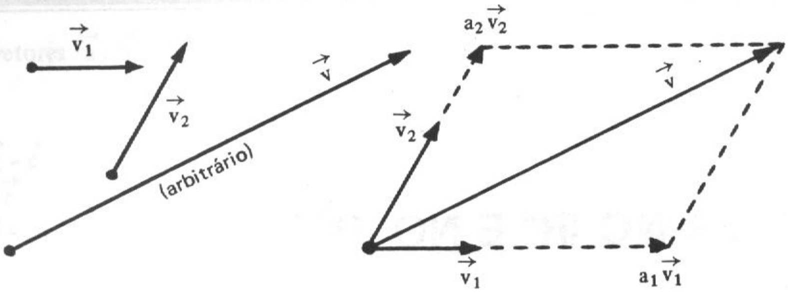
2.1 Decomposição de um Vetor no Plano

Dados dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, *não colineares*, qualquer vetor $\vec{v}$ (*coplanar* com $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$) pode ser decomposto segundo as direções de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. O problema consiste em determinar dois vetores cujas direções sejam as de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ e cuja soma seja $\vec{v}$. Em outras palavras, iremos determinar dois números reais a_1 e a_2 tais que:

$$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$$

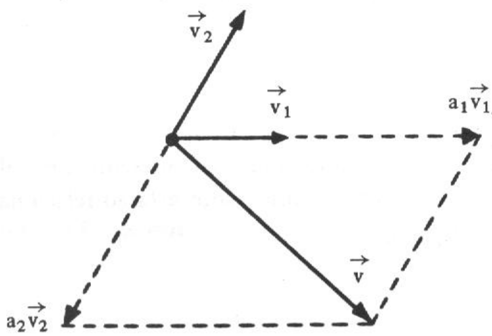
Exemplos

1) Dados os vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não colineares e $\vec{v}$ (arbitrário), a figura mostra como é possível formar um paralelogramo em que os lados são determinados pelos vetores $a_1\vec{v}_1$ e $a_2\vec{v}_2$ e, portanto, a soma deles é o vetor $\vec{v}$, que corresponde à diagonal desse paralelogramo:



$$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$$

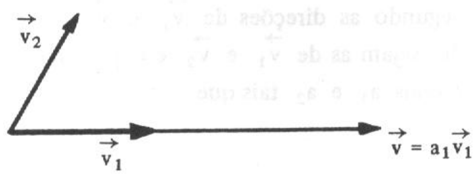
2) Na figura seguinte os vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são mantidos e consideramos um outro vetor $\vec{v}$:



Para esta figura, tem-se: $a_1 > 0$ e $a_2 < 0$.

3) Se, no caso particular, o vetor $\vec{v}$ tiver a mesma direção de $\vec{v}_1$ ou de $\vec{v}_2$, digamos de $\vec{v}_1$, como na figura, $\vec{v}$ não pode ser diagonal do paralelogramo e, portanto, a_2 deve ser igual a zero:

$$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + 0\,\vec{v}_2$$



Quando o vetor $\vec{v}$ estiver representado por:

$$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 \qquad (2.1)$$

dizemos que $\vec{v}$ é *combinação linear* de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. O par de vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, não colineares, é chamado *base* no plano. Aliás, qualquer conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ de vetores não colineares constitui uma base no plano. Os números a_1 e a_2 da representação (2.1) são chamados *componentes* ou *coordenadas* de $\vec{v}$ em relação à base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$. É bom logo esclarecer que, embora estejamos simbolizando a base como um conjunto, nós a pensamos como um conjunto ordenado. O vetor $a_1\vec{v}_1$ é chamado *projeção de* $\vec{v}$ *sobre* $\vec{v}_1$ *segundo a direção de* $\vec{v}_2$. Do mesmo modo, $a_2\vec{v}_2$ *é a projeção de* $\vec{v}$ *sobre* $\vec{v}_2$ *segundo a direção de* $\vec{v}_1$ (Fig. 2.1-a).

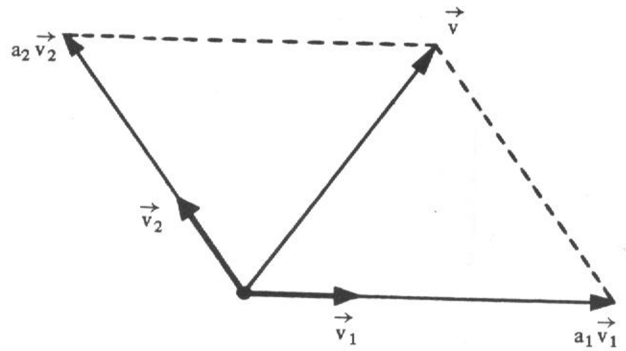


Figura 2.1-a

Na prática, as bases mais utilizadas são as bases *ortonormais.*

Uma base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ é dita ortonormal se os seus vetores forem ortogonais e unitários, isto é, $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$ e $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$.

Na Figura 2.1-b consideramos uma base ortonormal $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ no plano xOy e um vetor $\vec{v}$ com componentes 3 e 2, respectivamente, isto é, $\vec{v} = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$.

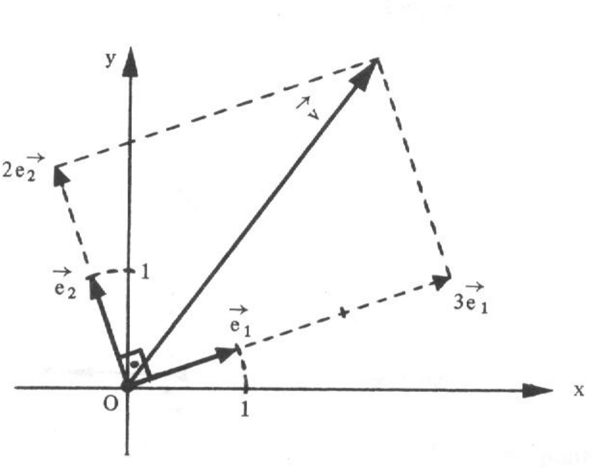


Figura 2.1-b

No caso de uma base ortonormal como esta, os vetores $3\vec{e}_1$ e $2\vec{e}_2$ são *projeções ortogonais* de $\vec{v}$ sobre $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$, respectivamente.

Existem naturalmente infinitas bases ortonormais no plano xOy, porém uma delas é particularmente importante. Trata-se da base formada pelos vetores representados por segmentos orientados com origem em O e extremidade nos pontos (1,0) e (0,1). Estes vetores são simbolizados com $\vec{i}$ e $\vec{j}$ e a base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ é chamada *canônica* (Fig. 2.1-c).

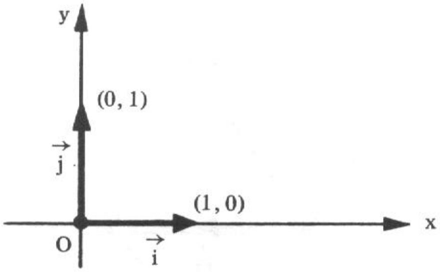


Figura 2.1-c

Em nosso estudo, a menos que haja referência em contrário, trataremos somente da base canônica.

Dado um vetor $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ (Fig. 2.1-d) no qual x e y são as componentes de $\vec{v}$ em relação à base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, o vetor $x\vec{i}$ é a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{i}$ (ou sobre o eixo dos x) e $y\vec{j}$ é a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{j}$ (ou sobre o eixo dos y). Como a projeção sempre será ortogonal, diremos somente *projeção*.

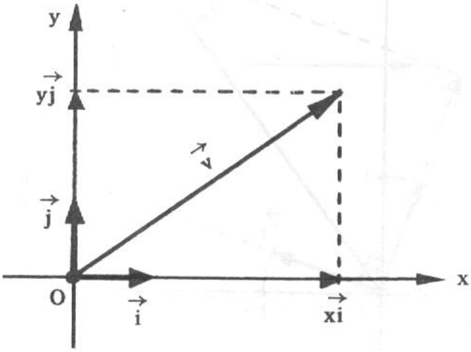


Figura 2.1-d

2.2 Expressão Analítica de um Vetor

Ora, fixada a base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, fica estabelecida uma correspondência biunívoca entre os vetores do plano e os pares ordenados (x, y) de números reais. Nestas condições, a cada vetor $\vec{v}$ do plano pode-se associar um par (x, y) de números reais que são suas componentes na base dada, razão porque define-se:

vetor no plano é um par ordenado (x, y) *de números reais* e se representa por:

$\vec{v} = (x, y)$

que é a *expressão analítica de* $\vec{v}$.

A primeira componente x é chamada abscissa e a segunda, ordenada. Por exemplo, em vez de escrever $\vec{v} = 3\vec{i} - 5\vec{j}$, pode-se escrever $\vec{v} = (3, -5)$. Assim também,

$$-\vec{i} + \vec{j} = (-1, 1)$$
$$3\vec{j} = (0, 3)$$
$$-10\vec{i} = (-10, 0)$$

e, particularmente, $\vec{i} = (1, 0)$, $\vec{j} = (0, 1)$ e $\vec{0} = (0, 0)$.

Observação

Deve ter ficado claro que a escolha proposital da base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ deve-se à simplificação. Assim, para exemplificar, quando nos referimos a um ponto $P(x, y)$, ele pode ser identificado com o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}$, sendo O a origem do sistema (Fig. 2.2).

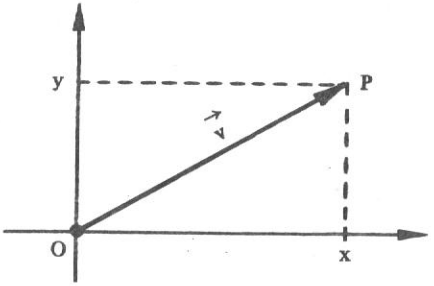


Figura 2.2

Desta forma, o plano pode ser encarado como um conjunto de pontos ou um conjunto de vetores.

2.3 Igualdade e Operações

2.3.1 Igualdade

Dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$, e escreve-se $\vec{u} = \vec{v}$.

Exemplos

1) Os vetores $\vec{u} = (3, 5)$ e $\vec{v} = (3, 5)$ são iguais.
2) Se o vetor $\vec{u} = (x + 1, 4)$ é igual ao vetor $\vec{v} = (5, 2y - 6)$, de acordo com a definição de igualdade dos vetores, $x + 1 = 5$ e $2y - 6 = 4$ ou $x = 4$ e $y = 5$. Assim, se $\vec{u} = \vec{v}$, então $x = 4$ e $y = 5$.

2.3.2 Operações

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ e $a \in \mathbb{R}$. Define-se:

a) $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
b) $a\vec{u} = (ax_1, ay_1)$

Portanto, para somar dois vetores, somam-se as suas coordenadas correspondentes, e para multiplicar um vetor por um número, multiplica-se cada componente do vetor por este número.

Exemplo

Dados os vetores $\vec{u} = (4, 1)$ e $\vec{v} = (2, 6)$, calcular $\vec{u} + \vec{v}$ e $2\vec{u}$.

A Figura 2.3-a mostra, geometricamente, que $\vec{u} + \vec{v} = (4, 1) + (2, 6) = (4 + 2, 1 + 6) = (6, 7)$, e a Figura 2.3-b que $2\vec{u} = 2(4, 1) = (8, 2)$.

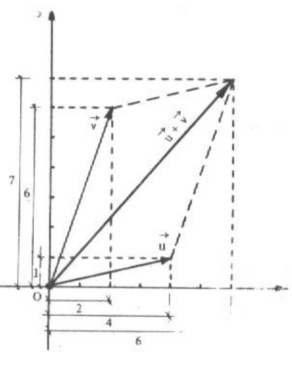


Figura 2.3-a

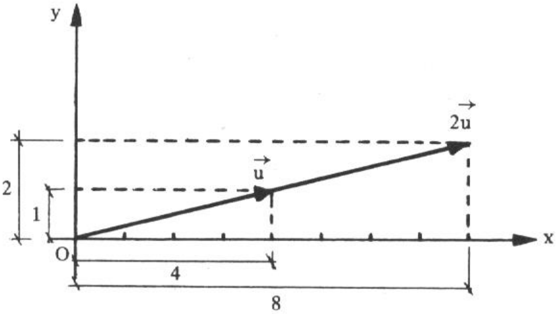


Figura 2.3-b

As definições acima e as operações algébricas dos números reais permitem demonstrar as propriedades citadas em 1.5:

a) para quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, tem-se

$$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$$
$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(v+\vec{w})$$
$$\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$$
$$\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$$

b) para quaisquer vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e os números reais a e b, tem-se

$$a(b\vec{v})=(ab)\vec{v}$$
$$(a+b)\vec{u}=a\vec{u}+b\vec{u}$$
$$a(\vec{u}+\vec{v})=a\vec{u}+a\vec{v}$$
$$1\vec{v}=\vec{v}$$

2.3.3 Problemas Resolvidos

1) Determinar o vetor $\vec{w}$ na igualdade $3\vec{w}+2\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{v}+\vec{w}$, sendo dados $\vec{u}=(3,-1)$ e $\vec{v}=(-2,4)$.

Solução

Esta equação $3\vec{w}+2\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{v}+\vec{w}$ pode ser resolvida como uma equação numérica:

$$6\vec{w}+4\vec{u}=\vec{v}+2\vec{w}$$
$$6\vec{w}-2\vec{w}=\vec{v}-4\vec{u}$$
$$4\vec{w}=\vec{v}-4\vec{u}$$
$$\vec{w}=\frac{1}{4}\vec{v}-\vec{u}$$

Substituindo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ na equação, vem

$$\vec{w} = \frac{1}{4}(-2, 4) - (3, -1)$$

$$\vec{w} = (-\frac{1}{2}, 1) - (3, -1)$$

$$\vec{w} = (-\frac{1}{2} + (-3), 1 + (+1))$$

$$\vec{w} = (-\frac{7}{2}, 2)$$

2) Encontrar os números a_1 e a_2 tais que

$$\vec{w} = a_1\vec{u} + a_2\vec{v}, \text{ sendo } \vec{u} = (1, 2), \vec{v} = (4, -2) \text{ e } \vec{w} = (-1, 8).$$

Solução

Substituindo os vetores na igualdade acima, temos:

$$(-1, 8) = a_1(1, 2) + a_2(4, -2)$$
$$(-1, 8) = (a_1, 2a_1) + (4a_2, -2a_2)$$
$$(-1, 8) = (a_1 + 4a_2, 2a_1 - 2a_2)$$

Da condição de igualdade de dois vetores, conclui-se que:

$$\begin{cases} a_1 + 4a_2 = -1 \\ 2a_1 - 2a_2 = 8 \end{cases}$$

sistema de solução $a_1 = 3$ e $a_2 = -1$. Logo, $\vec{w} = 3\vec{v}_1 - \vec{v}_2$.

2.4 Vetor Definido por Dois Pontos

Inúmeras vezes um vetor é representado por um segmento orientado que não parte da origem do sistema. Consideremos o vetor $\overrightarrow{AB}$ de origem no ponto $A(x_1, y_1)$ e extremidade em $B(x_2, y_2)$ (Fig. 2.4-a).

De acordo com o que foi visto em 2.2, os vetores $\vec{OA}$ e $\vec{OB}$ têm expressões analíticas:

$\vec{OA} = (x_1, y_1)$ e $\vec{OB} = (x_2, y_2)$.

Por outro lado, do triângulo OAB da figura, vem:

$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$

donde

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

ou:

$\vec{AB} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1)$

e:

$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

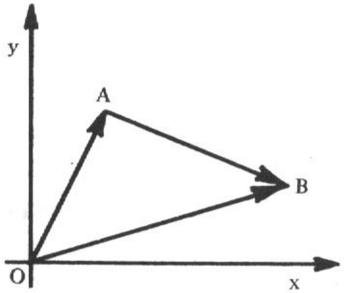


Figura 2.4-a

isto é, as componentes de $\vec{AB}$ são obtidas subtraindo-se das coordenadas da extremidade B as coordenadas da origem A, razão pela qual também se escreve $\vec{AB} = B - A$.

É importante assinalar que as componentes do vetor $\vec{AB}$, calculadas por meio de B–A, são sempre as mesmas componentes do representante OP com origem no início do sistema. Este detalhe fica claro na Figura 2.4-b onde os segmentos orientados equipolentes AB, CD e OP representam o mesmo vetor (3,1).

$\vec{AB} = B - A = (1,4) - (-2,3) = (3,1)$

$\vec{CD} = D - C = (4,3) - (1,2) = (3,1)$

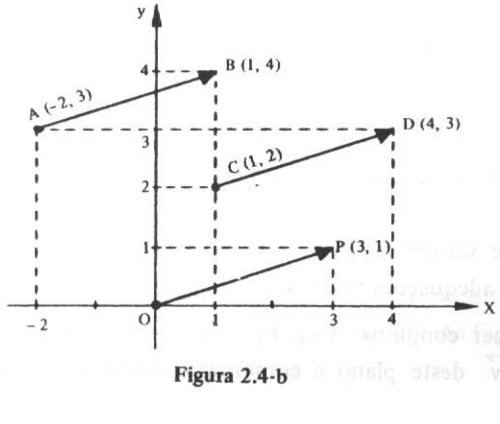


Figura 2.4-b

2.4.1 Problema Resolvido

3) Dados os pontos $A(-1, 2)$, $B(3, -1)$ e $C(-2, 4)$, determinar $D(x, y)$ de modo que $\vec{CD} = \frac{1}{2}\vec{AB}$.

Solução

$\vec{CD} = D - C = (x, y) - (-2, 4) = (x + (+2), y + (-4)) = (x + 2, y - 4)$

$\vec{AB} = B - A = (3, -1) - (-1, 2) = (3 + (+1), -1 + (-2)) = (4, -3)$

logo:

$$(x + 2, y - 4) = \frac{1}{2}(4, -3)$$

$$(x + 2, y - 4) = (2, -\frac{3}{2})$$

Pela condição de igualdade de dois vetores:

$$\begin{cases} x + 2 = 2 \\ y - 4 = -\dfrac{3}{2}, \end{cases}$$

sistema cuja solução é $x = 0$ e $y = \frac{5}{2}$.

Por conseguinte:

$$D\left(0, \frac{5}{2}\right).$$

2.5 Decomposição no Espaço

Todo o estudo de vetores feito até aqui, no plano, pode ser realizado no espaço de forma análoga, consideradas as adequações necessárias.

No plano, qualquer conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ de dois vetores, não colineares, é uma base e, portanto, todo vetor $\vec{v}$ deste plano é combinação linear dos vetores da base, isto é, sempre existem os números a_1 e a_2 reais tais que $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$. No espaço, qualquer conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ de três vetores *não coplanares* é uma base e, de forma análoga, demonstra-se que todo vetor $\vec{v}$ do espaço é combinação linear dos vetores da base, isto é, sempre existem números reais a_1, a_2 e a_3 tais que:

$$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3$$

onde a_1, a_2 e a_3 são as componentes de $\vec{v}$ em relação à base considerada.

Uma base no espaço é ortonormal se os três vetores forem unitários e dois a dois, ortogonais. Por analogia ao que fizemos no plano, dentre as infinitas bases ortonormais existentes, escolheremos para nosso estudo a base canônica representada por $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Consideremos estes três vetores representados com origem no mesmo ponto O e por este ponto três retas como mostra a Figura 2.5-a. A reta com a direção do vetor $\vec{i}$ é o eixo dos x (das abscissas), a reta com a direção do vetor $\vec{j}$ é o eixo dos y (das ordenadas) e a reta com a direção do vetor $\vec{k}$ é o eixo dos z (das cotas). As setas indicam o sentido positivo de cada eixo. Estes eixos são chamados eixos coordenados.

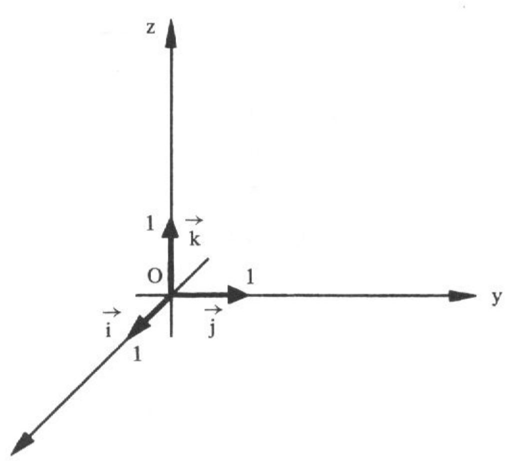


Figura 2.5-a

Cada dupla de eixos determina um plano coordenado. Portanto, temos três planos coordenados: o plano xOy ou xy, o plano xOz ou xz e o plano yOz ou yz. As Figuras 2.5-b, 2.5-c e 2.5-d dão uma idéia dos planos xy, xz e yz, respectivamente.

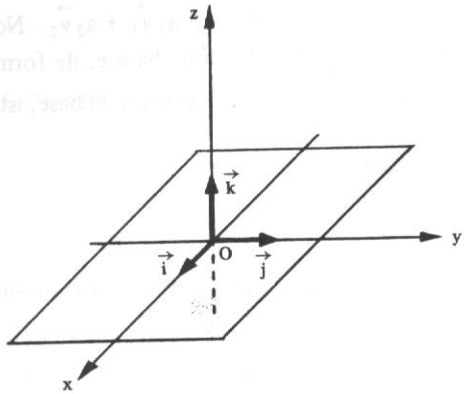


Figura 2.5-b

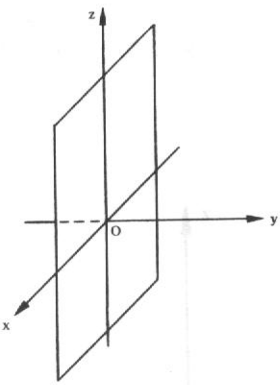


Figura 2.5-c

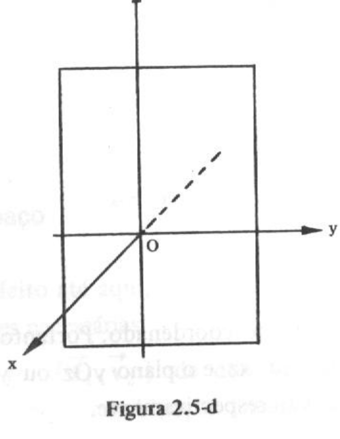


Figura 2.5-d

Estes três planos se interceptam segundo os três eixos dividindo o espaço em oito regiões, cada uma delas chamada octante. A Figura 2.5-e dá uma idéia do 1º octante, a Figura 2.5-f do 2º octante e a Figura 2.5-g do 3º octante.

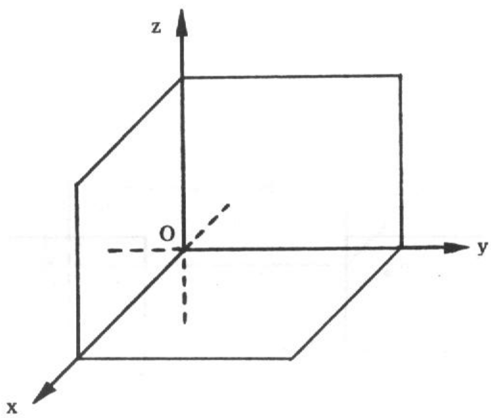


Figura 2.5-e

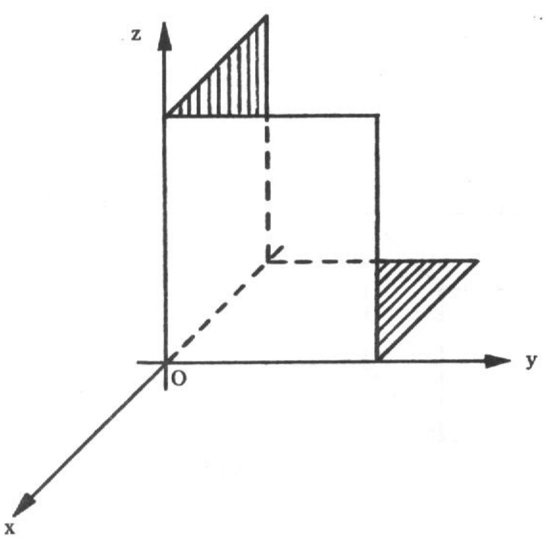


Figura 2.5-f

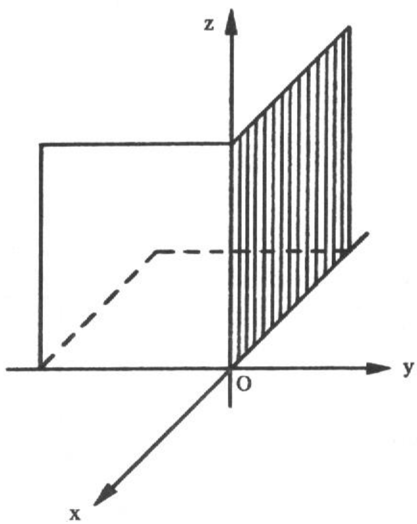


Figura 2.5-g

A cada ponto P do espaço vai corresponder uma terna (a, b, c) de números reais, chamadas coordenadas de P e denominadas abscissa, ordenada e cota, respectivamente. Para obter a abscissa de P, tracemos por P um plano paralelo ao plano yz; o ponto de interseção deste plano com o eixo dos x tem, nesse eixo, uma coordenada a, que é a abscissa de P

(Fig. 2.5-h). Para obter a ordenada de P, tracemos por P um plano paralelo ao plano xz; o ponto de interseção deste plano com o eixo dos y tem, nesse eixo, uma coordenada b, que é a ordenada de P (Fig. 2.5-i). De forma análoga, ao traçar por P um plano paralelo ao plano xy, fica determinada a coordenada c, que é a cota de P (Fig. 2.5-j).

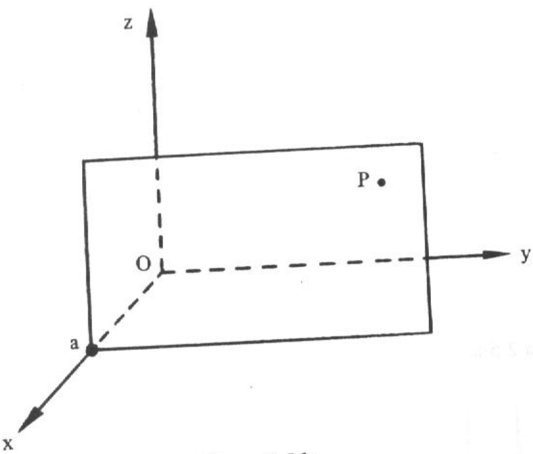


Figura 2.5-h

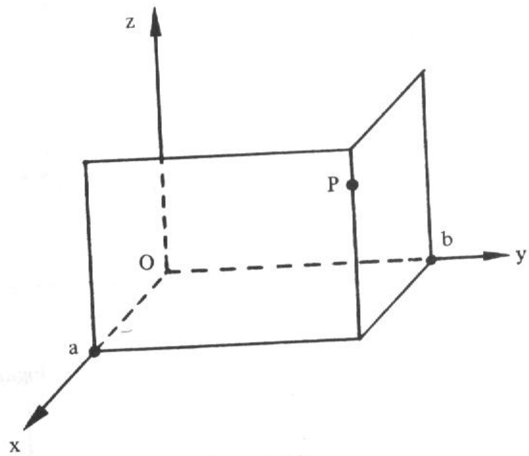


Figura 2.5-i

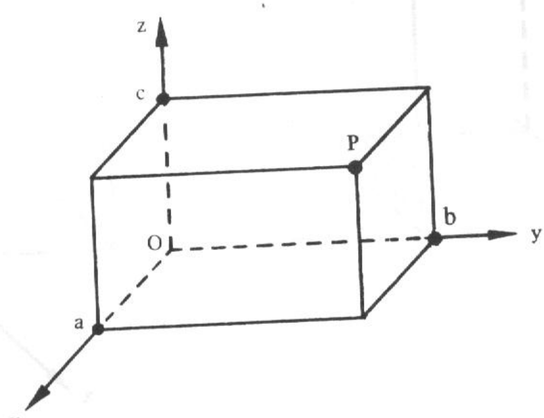


Figura 2.5-j

Com este procedimento de traçar os três planos pelo ponto P, fica determinado um paralelepípedo retângulo como o da Figura 2.5-j. Se o ponto fosse P(2, 4, 3), com idêntico procedimento, teríamos o paralelepípedo da Figura 2.5-ℓ.

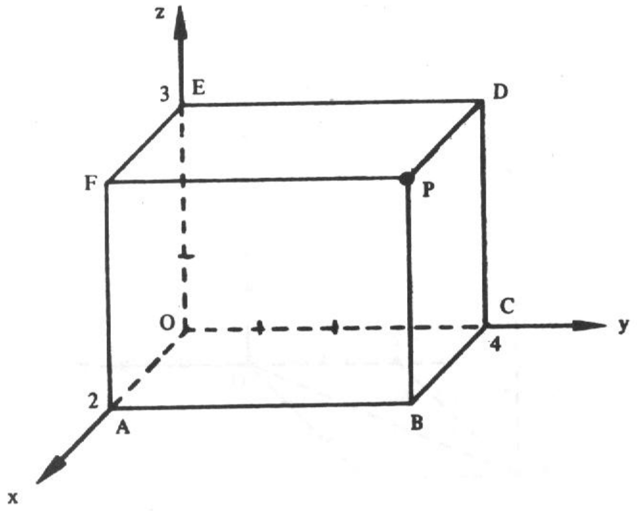


Figura 2.5-ℓ

Com base nesta figura, temos:

$A(2, 0, 0)$ – um ponto $P(x, y, z)$ está no eixo dos x quando $y = 0$ e $z = 0$;
$C(0, 4, 0)$ – um ponto está no eixo dos y quando $x = 0$ e $z = 0$;
$E(0, 0, 3)$ – um ponto está no eixo dos z quando $x = 0$ e $y = 0$;
$B(2, 4, 0)$ – um ponto está no plano xy quando $z = 0$;
$D(0, 4, 3)$ – um ponto está no plano yz quando $x = 0$;
$F(2, 0, 3)$ – um ponto está no plano xz quando $y = 0$.

O ponto B é a projeção de P no plano xy, assim como D e F são as projeções de P nos planos yz e xz, respectivamente. O ponto $A(2, 0, 0)$ é a projeção de $P(2, 4, 3)$ no eixo dos x, assim como $C(0, 4, 0)$ e $E(0, 0, 3)$ são as projeções de P nos eixos dos y e dos z, respectivamente.

Está claro que um ponto do plano xy é do tipo $(x, y, 0)$. Ao desejarmos marcar um ponto no espaço, digamos $A(3, -2, 4)$, procedemos assim:

1º) marca-se o ponto $A'(3, -2, 0)$ no plano xy;

2º) desloca-se A' paralelamente ao eixo dos z, 4 unidades para cima (se fosse -4 seriam 4 unidades para baixo) (Fig. 2.5-m).

Para completar nosso estudo, consideremos um vetor $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, onde x, y e z são as componentes de $\vec{v}$ na base canônica $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Da mesma forma como fizemos para

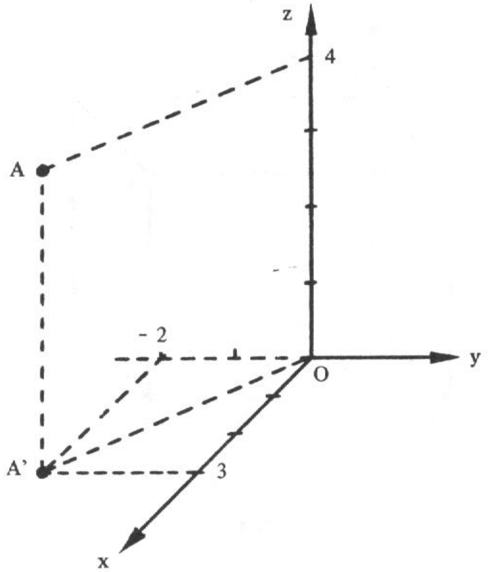


Figura 2.5-m

o plano, este vetor $\vec{v}$ é igual ao vetor $\overrightarrow{OP}$ com O (0, 0, 0) e P(x, y, z). Na Figura 2.5-n, o vetor $\vec{v}$ corresponde à diagonal do paralelepípedo, cujos lados são determinados pelos vetores $x\vec{i}$, $y\vec{j}$ e $z\vec{k}$. E, para simplificar, escreveremos

$$\vec{v} = (x, y, z)$$

que é a expressão analítica de $\vec{v}$.

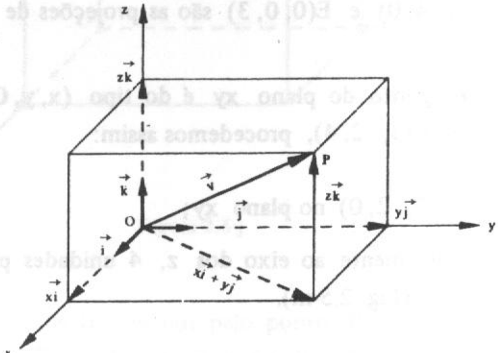


Figura 2.5-n

Em vez de escrever $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, pode-se escrever $\vec{v} = (2, -3, 1)$. Assim, também,

$$\vec{i} - \vec{j} = (1, -1, 0)$$
$$2\vec{j} - \vec{k} = (0, 2, -1)$$
$$4\vec{k} = (0, 0, 4)$$

e, em particular, $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

Tendo em vista a correspondência biunívoca entre o conjunto de pontos $P(x, y, z)$ do espaço e o conjunto de vetores $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, o espaço pode ser encarado como um conjunto de pontos ou um conjunto de vetores. Diz-se que este espaço tem três dimensões ou que ele é *tridimensional*, porque qualquer uma de suas bases tem três vetores e, portanto, o número de componentes de um vetor é três. De forma análoga, o plano tem dimensão 2 ou é *bidimensional*. Fica fácil entender que a reta tem dimensão 1 ou é unidimensional.

O conjunto formado por um ponto e por uma base constitui um sistema referencial. Em particular, que é o nosso caso, o conjunto formado pelo ponto O e pela base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ é chamado *referencial ortonormal de origem* O ou, ainda, *sistema cartesiano ortonormal* Oxyz. Este sistema (Fig. 2.5-a) é indicado por $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Por analogia, no plano, o sistema $(O, \vec{i}, \vec{j})$ é chamado *sistema cartesiano ortonormal* xOy ou, simplesmente, *sistema cartesiano* xOy.

Por outro lado, sabemos que a representação geométrica do conjunto $\mathbb{R}$ dos reais é a reta, por isso também chamada *reta real* (Fig. 2.5-o).

Figura 2.5-o

O produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$ é o conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)/x, y \in \mathbb{R}\}$ e sua representação geométrica é o *plano cartesiano* determinado pelos dois eixos cartesianos ortogonais x e y (Fig. 2.5-p).

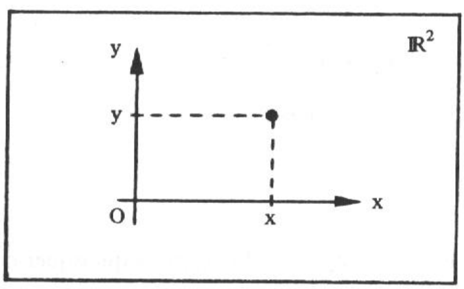


Figura 2.5-p

O produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^3$ é o conjunto $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)/x, y, z \in \mathbb{R}\}$ e sua representação geométrica é o *espaço cartesiano* determinado pelos três eixos cartesianos, dois a dois ortogonais, Ox, Oy e Oz (Fig. 2.5-q).

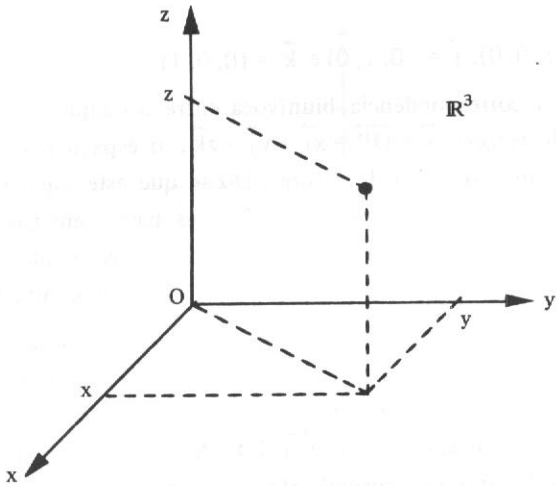


Figura 2.5-q

2.6 Igualdade — Operações — Vetor Definido por Dois Pontos

Da mesma forma como tivemos no plano, teremos no espaço:

I) Dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ e $z_1 = z_2$;

II) Dados os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $a \in \mathbb{R}$, define-se:

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2)$$

$$a\vec{u} = (ax_1, ay_1, az_1)$$

III) Se $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ são dois pontos quaisquer no espaço, então:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$$

2.7 Condição de Paralelismo de Dois Vetores

Em 1.5.3 vimos que, se dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ são colineares (ou paralelos), existe um número k tal que $\vec{u} = k\vec{v}$, ou seja,

$$(x_1, y_1, z_1) = k(x_2, y_2, z_2)$$

ou:

$$(x_1, y_1, z_1) = (kx_2, ky_2, kz_2)$$

mas, pela definição de igualdade de vetores:

$$x_1 = kx_2$$
$$y_1 = ky_2$$
$$z_1 = kz_2$$

ou:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = k$$

Esta é a condição de paralelismo de dois vetores, isto é, dois vetores são paralelos quando suas coordenadas são proporcionais. Representa-se por $\vec{u}//\vec{v}$ dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ paralelos.

Exemplo

Os vetores $\vec{u} = (-2, 3 - 4)$ e $\vec{v} = (-4, 6, -8)$ são paralelos pois:

$$\frac{-2}{-4} = \frac{3}{6} = \frac{-4}{-8}, \text{ ou seja, } \vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v}.$$

É claro que se uma componente de um vetor é nula, a componente correspondente de um vetor paralelo também é nula.

2.7.1 Problemas Resolvidos

4) Dados os pontos A(0, 1, -1) e B(1, 2, -1) e os vetores $\vec{u} = (-2, -1, 1)$, $\vec{v} = (3, 0, -1)$ e $\vec{w} = (-2, 2, 2)$, verificar se existem os números a_1, a_2 e a_3 tais que $\vec{w} = a_1\overrightarrow{AB} + a_2\vec{u} + a_3\vec{v}$.

Solução

Tem-se: $\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 2, -1) - (0, 1, -1) = (1 - 0, 2 + (-1), -1 + (+1)) = (1, 1, 0)$

Substituindo os vetores na igualdade dada, resulta:

$$(-2, 2, 2) = a_1(1, 1, 0) + a_2(-2, -1, 1) + a_3(3, 0, -1)$$

ou:

$$(-2, 2, 2) = (a_1, a_1, 0) + (-2a_2, -a_2, a_2) + (3a_3, 0, -a_3)$$

Somando os três vetores do segundo membro da igualdade, vem:

$$(-2, 2, 2) = (a_1 - 2a_2 + 3a_3, a_1 - a_2, a_2 - a_3)$$

Pela condição de igualdade de vetores, obteremos o sistema:

$$\begin{cases} a_1 - 2a_2 + 3a_3 = -2 \\ a_1 - a_2 = 2 \\ a_2 - a_3 = 2 \end{cases}$$

que tem por solução $a_1 = 3$, $a_2 = 1$ e $a_3 = -1$.

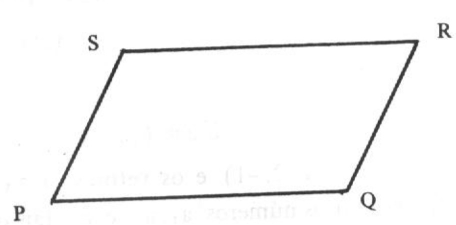
Logo:

$$\vec{w} = 3\overrightarrow{AB} + \vec{u} - \vec{v}$$

5) Dados os pontos $P(1, 2, 4)$, $Q(2, 3, 2)$ e $R(2, 1, -1)$, determinar as coordenadas de um ponto S tal que P, Q, R e S sejam vértices de um paralelogramo.

Solução

Se $PQRS$ é o paralelogramo da figura, então $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ e $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$.



Para $S(x, y, z)$, vamos ter na primeira igualdade:

$$Q - P = R - S$$

ou:

$$(1, 1, -2) = (2 - x, 1 - y, -1 - z)$$

mas, pela definição de igualdade de vetores:

$$2 - x = 1$$
$$1 - y = 1$$
$$-1 - z = -2$$

Essas igualdades implicam ser $x = 1$, $y = 0$ e $z = 1$.

Logo:

$$S = (1, 0, 1).$$

Com a utilização da 2ª igualdade, o resultado obviamente seria o mesmo. Além desta solução, existem duas outras que ficam a cargo do leitor.

6) Determinar os valores de m e n para que sejam paralelos os vetores $\vec{u} = (m + 1, 3, 1)$ e $\vec{v} = (4, 2, 2n - 1)$.

Solução

A condição de paralelismo de dois vetores permite escrever:

$$\frac{m+1}{4} = \frac{3}{2} = \frac{1}{2n-1}$$

ou:

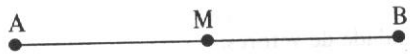
$$\begin{cases} 2(m+1) = 12 \\ 3(2n-1) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2m + 2 = 12 \\ 6n - 3 = 2 \end{cases}$$

A solução do sistema permite dizer que $m = 5$ e $n = \frac{5}{6}$.

7) Dar as expressões das coordenadas do ponto médio do segmento de reta de extremidades $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$.

Solução



O ponto médio M é tal que

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$$

ou:

$$M - A = B - M$$

Sendo $M(x, y)$, vem:

$$(x - x_1,\ y - y_1) = (x_2 - x,\ y_2 - y)$$

e daí:

$$x - x_1 = x_2 - x$$
$$y - y_1 = y_2 - y$$

portanto:

$$2x = x_2 + x_1$$
$$2y = y_2 + y_1$$

logo:

$$x = \frac{x_2 + x_1}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_2 + y_1}{2} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

2.8 Problemas Propostos

1) Determinar a extremidade do segmento que representa o vetor $\vec{v} = (2, -5)$, sabendo que sua origem é o ponto $A(-1, 3)$.

2) Dados os vetores $\vec{u} = (3, -1)$ e $\vec{v} = (-1, 2)$, determinar o vetor $\vec{w}$ tal que

a) $4(\vec{u} - \vec{v}) + \frac{1}{3}\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{w}$

b) $3\vec{w} - (2\vec{v} - \vec{u}) = 2(4\vec{w} - 3\vec{u})$

3) Dados os pontos $A(-1, 3)$, $B(2, 5)$ e $C(3, -1)$, calcular $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{BC}$ e $3\overrightarrow{BA} - 4\overrightarrow{CB}$.

4) Dados os vetores $\vec{u} = (3, -4)$ e $\vec{v} = (-\frac{9}{4}, 3)$, verificar se existem números a e b tais que $\vec{u} = a\vec{v}$ e $\vec{v} = b\vec{u}$.

5) Dados os vetores $\vec{u} = (2, -4)$, $\vec{v} = (-5, 1)$ e $\vec{w} = (-12, 6)$, determinar k_1 e k_2 tal que $\vec{w} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}$.

6) Dados os pontos $A(-1, 3)$, $B(1, 0)$, $C(2, -1)$, determinar D tal que $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA}$.

7) Dados os pontos $A(2, -3, 1)$ e $B(4, 5, -2)$, determinar o ponto P tal que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB}$.

8) Dados os pontos $A(-1, 2, 3)$ e $B(4, -2, 0)$, determinar o ponto P tal que $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{AB}$.

9) Determinar o vetor $\vec{v}$ sabendo que $(3, 7, 1) + 2\vec{v} = (6, 10, 4) - \vec{v}$.

10) Encontrar os números a_1 e a_2 tais que $\vec{w} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$, sendo $\vec{v}_1 = (1, -2, 1)$, $\vec{v}_2 = (2, 0, -4)$ e $\vec{w} = (-4, -4, 14)$.

11) Determinar a e b de modo que os vetores $\vec{u} = (4, 1, -3)$ e $\vec{v} = (6, a, b)$ sejam paralelos.

12) Verificar se são colineares os pontos:

a) $A(-1, -5, 0)$, $B(2, 1, 3)$ e $C(-2, -7, -1)$

b) $A(2, 1, -1)$, $B(3, -1, 0)$ e $C(1, 0, 4)$

13) Calcular a e b de modo que sejam colineares os pontos $A(3, 1, -2)$, $B(1, 5, 1)$ e $C(a, b, 7)$.

14) Mostrar que os pontos $A(4, 0, 1)$, $B(5, 1, 3)$, $C(3, 2, 5)$ e $D(2, 1, 3)$ são vértices de um paralelogramo.

15) Determinar o simétrico do ponto $P(3, 1, -2)$ em relação ao ponto $A(-1, 0, -3)$.

2.8.1 Respostas dos Problemas Propostos

1) $(1, -2)$

2) *a*) $\vec{w} = (-\frac{15}{2}, \frac{15}{2})$; *b*) $\vec{w} = (\frac{23}{5}, -\frac{11}{5})$

3) $(-4, 1)$, $(2, 5)$, $(-5, -30)$

4) $a = -\frac{4}{3}$, $b = -\frac{3}{4}$

5) $k_1 = -1$ e $k_2 = 2$

6) $D(4, -4)$

7) $P(3, 1, -\frac{1}{2})$

8) $(14, -10, -6)$

9) $\vec{v} = (1, 1, 1)$

10) $a_1 = 2$, $a_2 = -3$

11) $a = \frac{3}{2}$ $b = -\frac{9}{2}$

12) *a*) sim *b*) não

13) $a = -3$ $b = 13$

15) $(-5, -1, -4)$